

八十八學年度高級中學數學能力競賽試題(一)(高雄中學)

1. 設 $x, y, z > 1$ 且 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ ，試證： $\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}$

2. 設 a, b, c, d 為實數，若下列條件成立：

$$\frac{a^3}{2^3-1^3} + \frac{b^3}{2^3-3^3} + \frac{c^3}{2^3-5^3} + \frac{d^3}{2^3-7^3} = 1$$

$$\frac{a^3}{4^3-1^3} + \frac{b^3}{4^3-3^3} + \frac{c^3}{4^3-5^3} + \frac{d^3}{4^3-7^3} = 1$$

$$\frac{a^3}{6^3-1^3} + \frac{b^3}{6^3-3^3} + \frac{c^3}{6^3-5^3} + \frac{d^3}{6^3-7^3} = 1$$

$$\frac{a^3}{8^3-1^3} + \frac{b^3}{8^3-3^3} + \frac{c^3}{8^3-5^3} + \frac{d^3}{8^3-7^3} = 1$$

3. 設 n 為正整數，如果恰好有一個整數 k 滿足條件 $\frac{8}{15} < \frac{n}{n+k} < \frac{7}{13}$ ，試求滿足這樣條件的最大的 n 值。

4. 如圖所示，半徑分別為 a, b 之兩圓相切於 p 點，設此 p 點固定在半徑為 b 之圓上，然後沿著半徑為 a 之圓周依逆時針方向滾動，求 p 點所經過的軌跡方程式。

