教育部八十九學年度高級中學數學科能力競賽複賽

高雄區試題(一)

1、設 P 為邊長為 1 之正方形 $ABCD$ 內部或邊上的任意一點，試求 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$ 之極小值和極大值。

2、當 $x<y$ 時恆有 $f(x)>f(y)$，則稱函數 f 為一減函數。令 f 為一減函數且定義：$f^{[2]}(x)=f(f(x))$；$f^{[n+1]}(x)=f(f^{[n]}(x))$，$n\geq 2$。

假設 $f(x)\neq x$ 且 $f^{[2]}(x)\neq x$，試證：

(a) 對所有的正偶數 n，$f^{[n]}(x)\neq x$

(b) 對所有的正奇數 n，$f^{[n]}(x)\neq x$

3、連續投擲一枚公正的硬幣，直到出現連續兩次正面才停止投擲，並計算投擲的次數，試問：

(1) 投擲到第 15 次才出現連續兩次正面的機率為何？

(2) 平均而言為了獲得連續兩次正面的期望　投擲次數為何？

4、已知一銳角三角形 ΔABC 之邊長分別為 a，b，c。令 r 為 ΔABC 內切圓之半徑，R 為 ΔABC 外接圓之半徑。試證：

(1) $r=4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

(2) $\dfrac{abc}{\sqrt{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}\geq\dfrac{r}{2R}$