

九十二學年度高級中學數學科能力競賽決賽
獨立研究（一）試題

注意事項：

- (16) 時間分配：2 小時。
- (17) 將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (18) 不可使用電算器。
- (19) 試題與答案卷一同繳回。

【問題一】：試求滿足

$$(x+93)P(x-93)+(x-93)P(x+93)=2xP(x)$$

的實係數多項式 $P(x)$ 。

【問題二】：設 x, y, z, w 都是正實數。試證：

$$(1+x)(1+y)(1+z)(1+w) \geq (1+\sqrt[3]{xyz})(1+\sqrt[3]{yzw})(1+\sqrt[3]{zwx})(1+\sqrt[3]{wxy}).$$

【問題三】：在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B$ 是直角，其內切圓與 \overline{BC} 、 \overline{CA} 、 \overline{AB} 分別交於點 D 、 E 、 F 。

直線 EF 與直線 BC 交於點 G ；過 E 引 \overline{EF} 的垂線交 \overline{BC} 於點 H 。設 $\triangle GHE$ 的外接圓與 \overline{AB} 交於點 K 。試證： $\overline{GK} = \overline{GD}$ 。